Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

Klausur zur Veranstaltung
Grundlagen der Statistik

FSS 2018, 1. Termin, 15. Juni 2018
Version: A

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen

Aussage	A	B	C	D	
A1:	○	●	○	○	
A2:	○	○	●	~~●~~	
A3:	●	○	●	○	
A4:	○	~~●~~	○	~~●~~	D

Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 30 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe
Ein idealer Würfel wird 3 mal geworfen und die gewürfelten Augenzahlen werden notiert. Ereignis A tritt ein, wenn alle geworfenen Augenzahlen verschieden sind. Das Ereignis B tritt ein, wenn jeder folgende Wurf eine größere Augenzahl liefert als der jeweils vorherige Wurf.
Dann gilt:

A1: (A) $A \subsetneq B$. (B) $B \subsetneq A$. (C) $A = B$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, liegt im Intervall

A2: (A) $[0.05, 0.07]$. (B) $(0.07, 0.09]$. (C) $(0.09, 0.11]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In einer Stadt erscheinen zwei Zeitungen. Von den Haushalten der Stadt abonnieren 80% mindestens eine Zeitung. 55% der Haushalte abonnieren genau eine Zeitung.
Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt keine Zeitung abonniert hat, liegt in

A3: (A) $[0.15, 0.21]$. (B) $(0.21, 0.27]$. (C) $(0.27, 0.33]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt beide Zeitungen abonniert hat, liegt in

A4: (A) $[0.07, 0.12]$. (B) $(0.12, 0.17]$. (C) $(0.17, 0.22]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für drei Ereignisse A, B und C seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.2$ und $P(A \cap B \cap C) = 0.1$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B | B \cap C)$ liegt in

A5: (A) $(0.35, 0.45]$. (B) $(0.45, 0.55]$. (C) $(0.55, 0.65]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit $P((A \cup C) \cap B)$ liegt in

A6: (A) $(0.18, 0.21]$. (B) $(0.21, 0.24]$. (C) $(0.24, 0.27]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Aufgabe
A, B und C seien unabhängige Ereignisse.
Dann ist die Gleichung $P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

A7: (A) weder stets richtig noch stets falsch. (B) stets falsch. (C) stets richtig.

Aufgabe
Auf einer Party sind 30% der Gäste weiblich, die anderen männlich. 80% der Männer trinken Bier, aber nur 50% der Frauen.
Der Anteil der Biertrinker unter den Partygästen liegt in

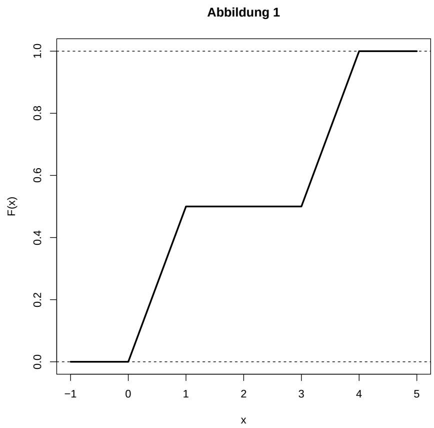
A8: (A) $(0.54, 0.59]$. (B) $(0.59, 0.64]$. (C) $(0.64, 0.69]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

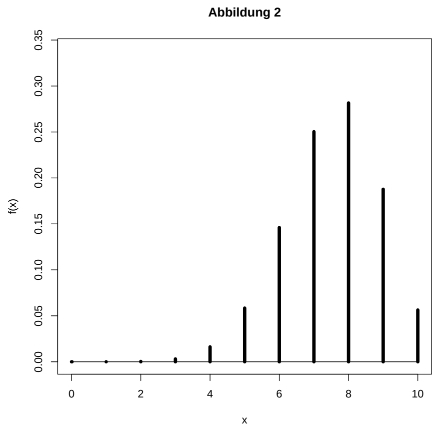
Der Anteil der Frauen unter den Biertrinkern der Partygäste liegt in

A9: (A) $[0.14, 0.17]$. (B) $(0.17, 0.20]$. (C) $(0.20, 0.23]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein gut gemischter Kartenstapel enthalte 16 Karten, davon seien 5 Herzkarten. Es werden nacheinander 3 Karten (ohne Zurücklegen) gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei 3 Herzkarten gezogen werden, liegt in

A10: (A) $[0.005, 0.01]$. (B) $(0.01, 0.02]$. (C) $(0.02, 0.04]$. (D) (A)–(C) sind falsch.





Aufgabe
In Abbildung 1 sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X dargestellt. Dann ist X

A11: (A) stetig. (B) diskret. (C) weder stetig noch diskret.

Die Zufallsvariable Y sei diskret verteilt mit Träger $\{0, 1, \ldots, 10\}$ und mit der in Abbildung 2 dargestellten Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Verteilung von Y ist dann

A12: (A) linksschief. (B) symmetrisch. (C) rechtsschief.

Aufgabe
Für die diskrete Zufallsvariable X gelte: $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.3$ und $P(X = 3) = 0.5$.
(a) Der Träger zu X ist

A13: (A) $\{0, 1, 2, 3\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\{0.2, 0.3, 0.5\}$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(1 < X \leq 2)$ ist gleich

A14: (A) 0.2. (B) 0.4. (C) 0.5. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E((X - E(X))^3)$ liegt in

A15: (A) $[-0.35, -0.3]$. (B) $(-0.3, -0.25]$. (C) $(-0.25, -0.2]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F(x) = 0.2 \cdot I_{[0,1)}(x) + 0.6 \cdot I_{[1,2)}(x) + 0.8 \cdot I_{[2,3)}(x) + I_{[3,\infty)}(x).$$

$E(X^2)$ liegt in

A16: (A) $(2.8, 3.1]$. (B) $(3.5, 3.8]$. (C) $(4.0, 4.3]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Träger $[2, 3]$.
Die Aussage $P(X \geq 2.8) = 0$ ist dann

A17: (A) stets richtig. (B) weder stets richtig noch stets falsch. (C) stets falsch.

Aufgabe
Der Quartalsumsatz einer Firma (in Millionen Euro) möge sich über eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichte beschreiben lassen:

$$f_X(x) = 0.2I_{[0,2]}(x) + 0.2I_{(2,4)}(x) + 0.1I_{[4,6]}(x).$$

Der im Mittel zu erwartende Quartalsumsatz liegt in

A18: (A) $(2.4, 2.7]$. (B) $(2.7, 3.0]$. (C) $(3.0, 3.3]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

x sei derjenige Wert, so dass der Quartalsumsatz mit Wahrscheinlichkeit 0.5 kleiner als x ist. x liegt dann im Intervall

A19: (A) $(2.1, 2.4]$. (B) $(2.7, 3.0]$. (C) $(3.2, 3.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim B(10, 0.3)$. $P(X = 1)$ liegt in

A20: (A) $[0, 0.11]$. (B) $(0.11, 0.13]$. (C) $(0.13, 0.15]$. (D) $(0.15, 1]$.

Aufgabe
Ein Aktienkurs steige mit Wahrscheinlichkeit 0.4 an einem Börsentag, er sinke mit Wahrscheinlichkeit 0.3 und bleibe mit Wahrscheinlichkeit 0.3 auf dem gleichen Niveau. Der Aktienverlauf sei für alle Börsentage unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an genau 4 von 10 Börsentagen steigt, liegt in

A21: (A) $[0.21, 0.24]$. (B) $(0.24, 0.27]$. (C) $(0.27, 0.30]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim Po(\lambda)$. Dabei sei bekannt, dass $P(X = 1) \approx 0.1752$ und $P(X = 2) \approx 0.2567$ gelten. Dann liegt λ in

A22: (A) $(2.10, 2.40]$. (B) $(2.40, 2.70]$. (C) $(2.70, 3.00]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-1.5)^2}{8}\Big).$$

Dann liegt die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 3)$ in

A23: (A) $[0.26, 0.29]$. (B) $(0.29, 0.32]$. (C) $(0.32, 0.35]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Das Gewicht von Eiern der Hühner einer bestimmten Rasse sei unabhängig voneinander normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 60\,\text{g}$ und Standardabweichung $\sigma = 10\,\text{g}$. S sei das Gesamtgewicht von 6 solchen Eiern (in g).
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei weniger als 55 g wiegt, ist in

A24: (A) $[0.29, 0.32]$. (B) $(0.32, 0.35]$. (C) $(0.35, 0.38]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(340 \leq S \leq 440)$ liegt in

A25: (A) $[0.66, 0.69]$. (B) $(0.69, 0.72]$. (C) $(0.72, 0.75]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei durch folgende Kontingenztabelle beschrieben:

X\Y	0	1
0	0.06	0.24
1	0.24	0.46

Dann sind X und Y

A26: (A) identisch verteilt. (B) unabhängig. (C) (A)–(B) sind falsch.

$P(X + Y = 1)$ liegt in

A27: (A) $(0.45, 0.49]$. (B) $(0.49, 0.53]$. (C) $(0.53, 0.57]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E(\frac{X}{1+Y})$ ist in

A28: (A) $(0.45, 0.48]$. (B) $(0.48, 0.51]$. (C) $(0.51, 0.54]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$Var(Y|X = 0)$ liegt in

A29: (A) $(0.12, 0.15]$. (B) $(0.15, 0.18]$. (C) $(0.18, 0.21]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $\mu = E(X_i)$ und $\sigma^2 = Var(X_i)$.
Die Kovarianz von $X_1 - \bar{X}_n$ und $X_2 - \bar{X}_n$ ist dann

A30: (A) $-\sigma^2/n$. (B) σ^2/n. (C) $2\sigma^2/n$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n \sim G(0, 4)$ seien u.i.v.
Der Grenzwert nach Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ ist

A31: (A) 16. (B) 4. (C) 8. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Kuhherde eines Milchbauern besteht aus 100 Milchkühen der gleichen Rasse. Die täglichen Milchmengen der einzelnen Kühe sind u.i.v. mit Erwartungswert 15 kg und Standardabweichung 1 kg. Die (approximative) Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Milchmenge der Herde den Wert 1515 kg übersteigt, liegt in

A32: (A) $(0.05, 0.08]$. (B) $(0.10, 0.13]$. (C) $(0.15, 0.18]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = 0$ und unbekannter Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$. $\bar{X}_3$ bezeichne das arithmetische Mittel aus X_1, X_2 und X_3. Gegeben seien die Schätzer

$$S_1 = \frac{1}{3}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X}_3)^2.$$

Von S_1 und S_2 sind erwartungstreu für σ^2:

A33: (A) Nur S_1. (B) Nur S_2. (C) S_1 und S_2. (D) Weder S_1 noch S_2.

Aufgabe
Der MSE-Wert eines Schätzer S zu einem Parameter θ berechnet sich als

$$MSE_\theta(S) = Var(S) + (Bias_\theta(S))^2.$$

X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = 4$.
Der MSE-Wert von $S_1 = 0.3X_1 + 0.7X_2$ zu μ liegt in

A34: (A) $(1.3, 1.6]$. (B) $(1.6, 1.9]$. (C) $(1.9, 2.2]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der MSE-Wert von $S_2 = 0.2X_1 + 0.6X_2 + 0.2X_3$ zu μ liegt in

A35: (A) $(1.0, 1.3]$. (B) $(1.3, 1.6]$. (C) $(1.6, 1.9]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Bei der Produktion von Festplatten für Computer entsteht mit Wahrscheinlichkeit θ eine fehlerhafte Festplatte. Die Festplatten werden unabhängig voneinander in Serien des Umfangs n produziert. Für eine Serie nehme die Zufallsvariable X_i, $i = 1, \ldots, n$, den Wert 1 an, falls die i-te produzierte Festplatte der Serie fehlerhaft ist, ansonsten den Wert 0. θ soll durch $\bar{X}_n$ geschätzt werden. Es werden folgende Aussagen formuliert:

(a) $\bar{X}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für θ.

(b) $Var(\bar{X}_n) = n\theta(1 - \theta)$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A36: (A) (a) und (b). (B) Nur (a). (C) Nur (b). (D) Weder (a) noch (b).

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. verteilt gemäß $P(X_i = 0) = 1 - \pi$, $P(X_i = 1) = 0.5\pi$, $P(X_i = 2) = 0.3\pi$ und $P(X_i = 3) = 0.2\pi$ für $\pi \in (0, 1)$.
Der Momentenschätzer für π werde mit $\hat{\Pi}_n$ bezeichnet. Er ist

A37: (A) $\bar{X}_n/1.5$. (B) $\bar{X}_n/1.7$. (C) $\bar{X}_n/1.25$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Es sei $S_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[2,\infty)}(X_i)$. Konsistente Schätzer für π sind

A38: (A) $\hat{\Pi}_n$, nicht S_n. (B) S_n, nicht $\hat{\Pi}_n$. (C) $\hat{\Pi}_n$ und S_n. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für den Anteil der Haushalte, die ein Fernsehgerät besitzen, ergab eine Stichprobe vom Umfang n zum Konfidenzniveau 0.9544 das Konfidenzintervall $[0.754, 0.846]$. n liegt in

A39: (A) $[200, 230]$. (B) $(230, 260]$. (C) $(260, 290]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Unter der *Quote* (englisch *Odds*) zu einer Wahrscheinlichkeit π versteht man die Zahl $\pi/(1-\pi)$. Die Quote zu 0.5 ist bspw. $0.5/(1 - 0.5) = 1 : 1 = 1$.
Ein Süßigkeitenhersteller interessiert sich für den Anteil π der Konsumenten, die den Geschmack eines neuen Snacks mögen. Im Rahmen einer repräsentativen Umfrage haben 15 von 50 Konsumenten gesagt, dass sie den Geschmack des neuen Snacks mögen.
Die untere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für π liegt in

A40: (A) $(0.12, 0.14]$. (B) $(0.14, 0.16]$. (C) $(0.16, 0.18]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für die Quote zu π liegt in

A41: (A) $(0.74, 0.77]$. (B) $(0.77, 0.80]$. (C) $(0.80, 0.83]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In der DIN-Mineralölnorm ist gefordert, dass die durchschnittliche Oktanzahl μ von Superbenzin mindestens 96 Oktan beträgt. Um einer Tankstellenkette eine Verletzung dieser Vorschrift nachzuweisen, führt eine Verbraucherorganisation an Hand von 100 zufällig und unabhängig voneinander entnommenen Superbenzinproben den Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 96$ zum Signifikanzniveau 0.05 durch.
Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 96.3 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt". Dann ist das

A42: (A) eine korrekte Entscheidung. (B) ein Fehler 1. Art. (C) ein Fehler 2. Art.

Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 95.8 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt". Dann ist das

A43: (A) ein Fehler 2. Art. (B) eine korrekte Entscheidung. (C) ein Fehler 1. Art.

Aufgabe
X sei normalverteilt mit Erwartungswert μ. Mit Hilfe einer Stichprobe aus der Verteilung von X soll zum Konfidenzniveau 0.95 ein Konfidenzintervall für μ berechnet werden. Die Stichprobe vom Umfang 4 ergab die Werte:

$$21, 29, 21, 33.$$

Die obere Grenze des Konfidenzintervalls liegt in

A44: (A) $(28.0, 30.0]$. (B) $(31.0, 33.0]$. (C) $(34.0, 36.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Paul hat normalverteilte Beobachtungen mit bekanntem σ^2 vorzuliegen. Zum Testproblem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ führt er keinen zweiseitigen Gauß-Test durch, sondern er führt die zwei zugehörigen einseitigen Gauß-Tests jeweils zum Niveau α durch und lehnt H_0 dann ab, wenn mindestens einer der beiden einseitigen Tests ablehnt. Der so durchgeführte Test hat das Signifikanzniveau

A45: (A) α. (B) 2α. (C) $\alpha/2$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein Automobilhersteller bezieht von einem Zulieferer täglich eine Lieferung von 2.000 Batterien. θ bezeichne den Anteil fehlerhafter Batterien in einer Lieferung. Für jede Lieferung überprüft der Automobilhersteller mit Hilfe einer Stichprobe von Umfang 100 zum Signifikanzniveau 0.0082 die Nullhypothese $H_0 : \theta \leq 0.1$. Wenn H_0 abgelehnt wird, schickt der Automobilhersteller die Lieferung an den Zulieferer zurück. Für zwei Lieferungen ergab sich als Anzahl fehlerhafter Batterien in der Stichprobe (a) 20 und (b) 15.
Welche der Lieferungen werden an den Zulieferer zurückgeschickt?

A46: (A) (a) und (b). (B) Nur (a). (C) Nur (b). (D) Weder (a) noch (b).

Aufgabe
Um zu prüfen, ob sich die im Mittel zu erwartende Rendite einer Aktie verändert hat, wurden die Tagesrenditen über zwei Zeiträume erfasst. Im Zeitraum 1 ergab sich ein Mittelwert von 5.4 % und eine Stichprobenvarianz von 17 $\%^2$. Im Zeitraum 2 ergab sich ein Mittelwert von 4.7 % und eine Stichprobenvarianz von 15 $\%^2$. In jedem Zeitraum wurden dabei 50 Beobachtungen erfasst.
Folgender Test ist durchzuführen in einer Zweistichprobenversion: ein

A47: (A) Gauß-Test. (B) Approx. Binomialtest. (C) t-Test. (D) Approx. Gauß-Test.

Der Betrag des Wertes der Teststatistik liegt im Intervall

A48: (A) $(0.55, 0.65]$. (B) $(0.65, 0.75]$. (C) $(0.75, 0.85]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der p-Wert zum Test liegt im Intervall

A49: (A) $(0.35, 0.40]$. (B) $(0.40, 0.45]$. (C) $(0.45, 0.50]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Zum Gewicht (in Gramm) von Äpfeln der Sorte Braeburn wurden Daten erhoben. Gehen Sie von normalverteilten Daten aus. Ein t-Test wurde mit Stata auf die Daten angewandt.

```
One-sample t test
------------------------------------------------------------------------------
Variable |     Obs        Mean    Std. Err.   Std. Dev.   [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       x |      60    188.2322    6.170426    47.79591      xxxxxx      xxxxxx
------------------------------------------------------------------------------
    mean = mean(x)                                                t =   1.3341
Ho: mean = 180                                   degrees of freedom =       59

    Ha: mean < 180                 Ha: mean != 180                 Ha: mean > 180
 Pr(T < t) = 0.9064         Pr(|T| > |t|) = 0.1873          Pr(T > t) = 0.0936
```

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen liegt in

A50: (A) $[172, 177]$. (B) $(178, 183]$. (C) $(185, 190]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für das im Mittel zu erwartende Gewicht μ der Äpfel liegt in

A51: (A) $[199.0, 200.0]$. (B) $(200.0, 201.0]$. (C) $(201.0, 202.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Teststatistik zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 175$ liegt in

A52: (A) $[2.00, 2.10]$. (B) $(2.10, 2.20]$. (C) $(2.20, 2.30]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für ein Unternehmen, das aus den Betrieben A und B besteht, soll die Vermutung geprüft werden, dass Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit unabhängig sind. Die Befragung von 200 zufällig ausgewählten Mitarbeitern ergab:

Betrieb	Zufriedene	nicht Zufriedene	Gesamt
A	80	20	100
B	40	60	100
Gesamt	120	80	200

Führen Sie einen geeigneten Signifikanztest zum Niveau $\alpha = 2.5\%$ durch.
Der Wert der Teststatistik des durchzuführenden Tests ist in

A53: (A) $[26, 29]$. (B) $(29, 32]$. (C) $(32, 35]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der kritische Wert des Tests liegt in

A54: (A) $[4.7, 4.9]$. (B) $(4.9, 5.1]$. (C) $(5.1, 5.3]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Vermutung, dass Unabhängigkeit zwischen der Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit besteht, ist durch den Test

A55: (A) bestätigt. (B) widerlegt.

Aufgabe
Basierend auf den beiden Beobachtungspaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) werde die KQ-Gerade $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$ ermittelt. Dabei gelte $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$.
Dann ist

A56: (A) $\hat{\beta}_1 > 0$ (B) $\hat{\beta}_1 = 0.$ (C) $\hat{\beta}_1 < 0.$

Aufgabe
Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Mitarbeiter (x_i) und den Ausgaben für Fortbildung (y_i [in Tausend Euro]) in Betrieben unterstellt man das Standardmodell der linearen Einfachregression $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Für $n = 20$ zufällig ausgewählte Betriebe erhält man: $\bar{x} = 150$, $\bar{y} = 200$,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 12\,500, \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 50\,000, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16\,250.$$

Die geschätzte Regressionsgerade sei $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.
$\hat{\beta}_1$ liegt in

A57: (A) $[1.00, 1.20]$. (B) $(1.20, 1.40]$. (C) $(1.40, 1.60]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Bei einer Firma von 80 Mitarbeitern liegt die Prognose für die zu erwartenden Fortbildungskosten (in Tausend Euro) in

A58: (A) $[90, 95]$. (B) $(95, 100]$. (C) $(100, 105]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Residualstreuung der Regression liegt in

A59: (A) $[23000, 25000]$. (B) $(25000, 27000]$. (C) $(27000, 29000]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für β_1 liegt in

A60: (A) $[2.00, 2.10]$. (B) $(2.10, 2.20]$. (C) $(2.20, 2.30]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

FSS 2018, 1. Termin, 15. Juni 2018
Version: B

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen

Aussage	A	B	C	D	
A1:	○	●	○	○	
A2:	○	○	●	~~●~~	
A3:	●	○	●	○	
A4:	○	~~●~~	○	~~●~~	D

Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 30 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe
Ein idealer Würfel wird 3 mal geworfen und die gewürfelten Augenzahlen werden notiert. Ereignis A tritt ein, wenn alle geworfenen Augenzahlen verschieden sind. Das Ereignis B tritt ein, wenn jeder folgende Wurf eine größere Augenzahl liefert als der jeweils vorherige Wurf.
Dann gilt:

A1: (A) $A \subsetneq B$. (B) $A = B$. (C) $B \subsetneq A$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, liegt im Intervall

A2: (A) $(0.06, 0.08]$. (B) $(0.08, 0.10]$. (C) $(0.10, 0.12]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In einer Stadt erscheinen zwei Zeitungen. Von den Haushalten der Stadt abonnieren 90% mindestens eine Zeitung. 60% der Haushalte abonnieren genau eine Zeitung.
Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt keine Zeitung abonniert hat, liegt in

A3: (A) $[0.08, 0.14]$. (B) $(0.14, 0.20]$. (C) $(0.20, 0.26]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt beide Zeitungen abonniert hat, liegt in

A4: (A) $[0.17, 0.22]$. (B) $(0.22, 0.27]$. (C) $(0.27, 0.32]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für drei Ereignisse A, B und C seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.2$ und $P(A \cap B \cap C) = 0.1$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B | B \cap C)$ liegt in

A5: (A) $[0.45, 0.55]$. (B) $(0.55, 0.65]$. (C) $(0.65, 0.75]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit $P((A \cup C) \cap B)$ liegt in

A6: (A) $(0.23, 0.26]$. (B) $(0.26, 0.29]$. (C) $(0.29, 0.32]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Aufgabe
A, B und C seien unabhängige Ereignisse.
Dann ist die Gleichung $P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

A7: (A) stets richtig. (B) weder stets richtig noch stets falsch. (C) stets falsch.

Aufgabe
Auf einer Party sind 40% der Gäste weiblich, die anderen männlich. 70% der Männer trinken Bier, aber nur 40% der Frauen.
Der Anteil der Biertrinker unter den Partygästen liegt in

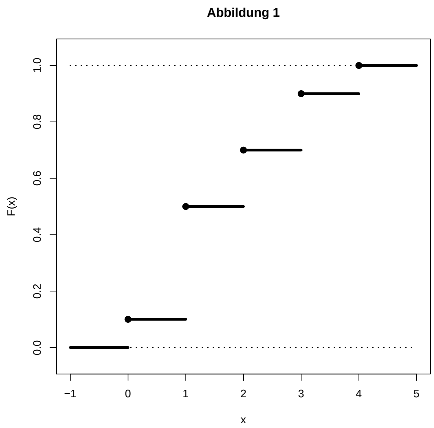
A8: (A) $[0.50, 0.55]$. (B) $(0.55, 0.60]$. (C) $(0.60, 0.65]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

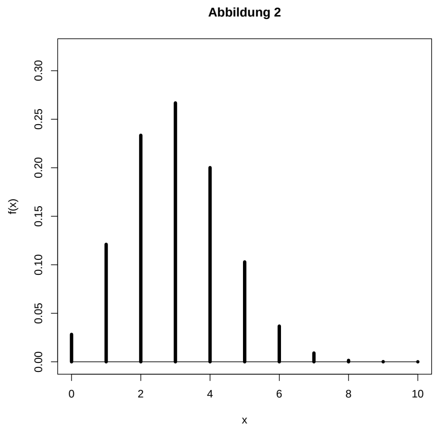
Der Anteil der Frauen unter den Biertrinkern der Partygäste liegt in

A9: (A) $[0.15, 0.20]$. (B) $(0.20, 0.25]$. (C) $(0.25, 0.30]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein gut gemischter Kartenstapel enthalte 20 Karten, davon seien 7 Herzkarten. Es werden nacheinander 3 Karten (ohne Zurücklegen) gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei 3 Herzkarten gezogen werden, liegt in

A10: (A) $[0.005, 0.01]$. (B) $(0.01, 0.02]$. (C) $(0.02, 0.04]$. (D) (A)–(C) sind falsch.





Aufgabe
In Abbildung 1 sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X dargestellt. Dann ist X

A11: (A) stetig. (B) weder stetig noch diskret. (C) diskret.

Die Zufallsvariable Y sei diskret verteilt mit Träger $\{0, 1, \dots, 10\}$ und mit der in Abbildung 2 dargestellten Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Verteilung von Y ist dann

A12: (A) linksschief. (B) rechtsschief. (C) symmetrisch.

Aufgabe
Für die diskrete Zufallsvariable X gelte: $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.2$ und $P(X = 3) = 0.3$.
(a) Der Träger zu X ist

A13: (A) $\{0, 1, 2, 3\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\{0.2, 0.3, 0.5\}$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(1 < X \leq 2)$ ist gleich

A14: (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E((X - E(X))^3)$ liegt in

A15: (A) $[0.25, 0.30]$. (B) $(0.30, 0.35]$. (C) $(0.35, 0.40]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F(x) = 0.2 \cdot I_{[0,1)}(x) + 0.3 \cdot I_{[1,2)}(x) + 0.5 \cdot I_{[2,3)}(x) + I_{[3,\infty)}(x).$$

$E(X^2)$ liegt in

A16: (A) $(4.6, 4.9]$. (B) $(4.9, 5.2]$. (C) $(5.2, 5.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Träger $[2,3]$.
Die Aussage $P(X \leq 2.2) = 0$ ist dann

A17: (A) stets richtig. (B) stets falsch. (C) weder stets richtig noch stets falsch.

Aufgabe
Der Quartalsumsatz einer Firma (in Millionen Euro) möge sich über eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichte beschreiben lassen:

$$f_X(x) = 0.3I_{[0,2]}(x) + 0.1I_{(2,4)}(x) + 0.1I_{[4,6]}(x).$$

Der im Mittel zu erwartende Quartalsumsatz liegt in

A18: (A) $(1.8, 2.1]$. (B) $(2.1, 2.4]$. (C) $(2.4, 2.7]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

x sei derjenige Wert, so dass der Quartalsumsatz mit Wahrscheinlichkeit 0.75 kleiner als x ist. x liegt dann im Intervall

A19: (A) $(3.4, 3.6]$. (B) $(3.6, 3.8]$. (C) $(3.8, 4.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim B(8, 0.3)$. $P(X = 1)$ liegt in

A20: (A) $[0, 0.19]$. (B) $(0.19, 0.21]$. (C) $(0.21, 0.23]$. (D) $(0.23, 1]$.

Aufgabe
Ein Aktienkurs steige mit Wahrscheinlichkeit 0.4 an einem Börsentag, er sinke mit Wahrscheinlichkeit 0.3 und bleibe mit Wahrscheinlichkeit 0.3 auf dem gleichen Niveau. Der Aktienverlauf sei für alle Börsentage unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an genau 3 von 8 Börsentagen steigt, liegt in

A21: (A) $[0.17, 0.20]$. (B) $(0.20, 0.23]$. (C) $(0.23, 0.26]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim Po(\lambda)$. Dabei sei bekannt, dass $P(X = 1) \approx 0.1159$ und $P(X = 2) \approx 0.1953$ gelten. Dann liegt λ in

A22: (A) $(2.90, 3.20]$. (B) $(3.20, 3.50]$. (C) $(3.50, 3.80]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\Bigl(-\frac{(x-1.6)^2}{18}\Bigr).$$

Dann liegt die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 4)$ in

A23: (A) $[0.29, 0.32]$. (B) $(0.32, 0.35]$. (C) $(0.35, 0.38]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Das Gewicht von Eiern der Hühner einer bestimmten Rasse sei unabhängig voneinander normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 65\,\mathrm{g}$ und Standardabweichung $\sigma = 10\,\mathrm{g}$. S sei das Gesamtgewicht von 6 solchen Eiern (in g).
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei weniger als 62 g wiegt, ist in

A24: (A) $[0.26, 0.29]$. (B) $(0.29, 0.32]$. (C) $(0.32, 0.35]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(350 \le S \le 420)$ liegt in

A25: (A) $[0.82, 0.85]$. (B) $(0.85, 0.88]$. (C) $(0.88, 0.91]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei durch folgende Kontingenztabelle beschrieben.

X\Y	0	1
0	0.06	0.28
1	0.20	0.46

Dann sind X und Y

A26: (A) identisch verteilt. (B) unabhängig. (C) (A)–(B) sind falsch.

$P(X + Y = 1)$ liegt in

A27: (A) $(0.45, 0.49]$. (B) $(0.49, 0.53]$. (C) $(0.53, 0.57]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E(\frac{X}{1+Y})$ ist in

A28: (A) $(0.35, 0.38]$. (B) $(0.38, 0.41]$. (C) $(0.41, 0.44]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$Var(Y|X = 0)$ liegt in

A29: (A) $(0.13, 0.16]$. (B) $(0.16, 0.19]$. (C) $(0.19, 0.22]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $\mu = E(X_i)$ und $\sigma^2 = Var(X_i)$.
Die Kovarianz von $X_1 - \bar{X}_n$ und $X_2 - 2\bar{X}_n$ ist dann

A30: (A) $-2\sigma^2/n$. (B) $-\sigma^2/n$. (C) $2\sigma^2/n$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n \sim G(0, 3)$ seien u.i.v.
Der Grenzwert nach Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ ist

A31: (A) 6.75. (B) 3.25. (C) 8.25. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Kuhherde eines Milchbauern besteht aus 100 Milchkühen der gleichen Rasse. Die täglichen Milchmengen der einzelnen Kühe sind u.i.v. mit Erwartungswert 16 kg und Standardabweichung 2 kg. Die (approximative) Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Milchmenge der Herde den Wert 1615 kg übersteigt, liegt in

A32: (A) $(0.18, 0.21]$. (B) $(0.21, 0.24]$. (C) $(0.24, 0.27]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = 0$ und unbekannter Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$. $\bar{X}_3$ bezeichne das arithmetische Mittel aus X_1, X_2 und X_3. Gegeben seien die Schätzer

$$S_1 = \frac{1}{3}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X}_3)^2.$$

Von S_1 und S_2 sind erwartungstreu für σ^2:

A33: (A) S_1 und S_2. (B) Nur S_1. (C) Nur S_2. (D) Weder S_1 noch S_2.

Aufgabe
Der MSE-Wert eines Schätzer S zu einem Parameter θ berechnet sich als

$$MSE_\theta(S) = Var(S) + (Bias_\theta(S))^2.$$

X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = 2$.
Der MSE-Wert von $S_1 = 0.3X_1 + 0.7X_2$ zu μ liegt in

A34: (A) $(0.9, 1.1]$. (B) $(1.1, 1.3]$. (C) $(1.3, 1.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der MSE-Wert von $S_2 = 0.2X_1 + 0.6X_2 + 0.2X_3$ zu μ liegt in

A35: (A) $(0.4, 0.6]$. (B) $(0.6, 0.8]$. (C) $(0.8, 1.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Bei der Produktion von Festplatten für Computer entsteht mit Wahrscheinlichkeit θ eine fehlerhafte Festplatte. Die Festplatten werden unabhängig voneinander in Serien des Umfangs n produziert. Für eine Serie nehme die Zufallsvariable X_i, $i = 1, \ldots, n$, den Wert 1 an, falls die i-te produzierte Festplatte der Serie fehlerhaft ist, ansonsten den Wert 0. θ soll durch $\bar{X}_n$ geschätzt werden. Es werden folgende Aussagen formuliert:

(a) $\bar{X}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für θ.

(b) $Var(\bar{X}_n) = \theta(1 - \theta)/n$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A36: (A) (a) und (b). (B) Nur (a). (C) Nur (b). (D) Weder (a) noch (b).

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. verteilt gemäß $P(X_i = 0) = 1 - \pi$, $P(X_i = 1) = 0.3\pi$, $P(X_i = 2) = 0.5\pi$ und $P(X_i = 3) = 0.2\pi$ für $\pi \in (0, 1)$.
Der Momentenschätzer für π werde mit $\hat{\Pi}_n$ bezeichnet. Er ist

A37: (A) $\bar{X}_n/1.9$. (B) $\bar{X}_n/1.7$. (C) $\bar{X}_n/1.5$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Es sei $S_n = \frac{1}{0.6 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} I_{[2,\infty)}(X_i)$. Konsistente Schätzer für π sind

A38: (A) $\hat{\Pi}_n$, nicht S_n. (B) S_n, nicht $\hat{\Pi}_n$. (C) $\hat{\Pi}_n$ und S_n. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für den Anteil der Haushalte, die ein Fernsehgerät besitzen, ergab eine Stichprobe vom Umfang n zum Konfidenzniveau 0.9544 das Konfidenzintervall $[0.654, 0.806]$. n liegt in

A39: (A) $[70, 90]$. (B) $(90, 110]$. (C) $(110, 130]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Unter der *Quote* (englisch *Odds*) zu einer Wahrscheinlichkeit π versteht man die Zahl $\pi/(1-\pi)$. Die Quote zu 0.5 ist bspw. $0.5/(1 - 0.5) = 1 : 1 = 1$.
Ein Süßigkeitenhersteller interessiert sich für den Anteil π der Konsumenten, die den Geschmack eines neuen Snacks mögen. Im Rahmen einer repräsentativen Umfrage haben 15 von 60 Konsumenten gesagt, dass sie den Geschmack des neuen Snacks mögen.
Die untere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für π liegt in

A40: (A) $(0.07, 0.09]$. (B) $(0.09, 0.11]$. (C) $(0.11, 0.13]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für die Quote zu π liegt in

A41: (A) $(0.54, 0.57]$. (B) $(0.57, 0.60]$. (C) $(0.60, 0.63]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In der DIN-Mineralölnorm ist gefordert, dass die durchschnittliche Oktanzahl μ von Superbenzin mindestens 96 Oktan beträgt. Um einer Tankstellenkette eine Verletzung dieser Vorschrift nachzuweisen, führt eine Verbraucherorganisation an Hand von 100 zufällig und unabhängig voneinander entnommenen Superbenzinproben den Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 96$ zum Signifikanzniveau 0.05 durch.
Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 96.3 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A42: (A) ein Fehler 1. Art. (B) eine korrekte Entscheidung. (C) ein Fehler 2. Art.

Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 95.8 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A43: (A) eine korrekte Entscheidung. (B) ein Fehler 1. Art. (C) ein Fehler 2. Art.

Aufgabe
X sei normalverteilt mit Erwartungswert μ. Mit Hilfe einer Stichprobe aus der Verteilung von X soll zum Konfidenzniveau 0.95 ein Konfidenzintervall für μ berechnet werden. Die Stichprobe vom Umfang 4 ergab die Werte:

$$21, 29, 25, 33.$$

Die obere Grenze des Konfidenzintervalls liegt in

A44: (A) $(27.0, 29.0]$. (B) $(29.0, 31.0]$. (C) $(31.0, 33.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Paul hat normalverteilte Beobachtungen mit bekanntem σ^2 vorzuliegen. Zum Testproblem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ führt er keinen zweiseitigen Gauß-Test durch, sondern er führt die zwei zugehörigen einseitigen Gauß-Tests jeweils zum Niveau α durch und lehnt H_0 dann ab, wenn mindestens einer der beiden einseitigen Tests ablehnt. Der so durchgeführte Test hat das Signifikanzniveau

A45: (A) 2α. (B) $\alpha/2$. (C) α. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein Automobilhersteller bezieht von einem Zulieferer täglich eine Lieferung von 2.000 Batterien. θ bezeichne den Anteil fehlerhafter Batterien in einer Lieferung. Für jede Lieferung überprüft der Automobilhersteller mit Hilfe einer Stichprobe von Umfang 200 zum Signifikanzniveau 0.0139 die Nullhypothese $H_0 : \theta \leq 0.08$. Wenn H_0 abgelehnt wird, schickt der Automobilhersteller die Lieferung an den Zulieferer zurück. Für zwei Lieferungen ergab sich als Anzahl fehlerhafter Batterien in der Stichprobe (a) 24 und (b) 28.
Welche der Lieferungen werden an den Zulieferer zurückgeschickt?

A46: (A) (a) und (b). (B) Weder (a) noch (b). (C) Nur (a). (D) Nur (b).

Aufgabe
Um zu prüfen, ob sich die im Mittel zu erwartende Rendite einer Aktie verändert hat, wurden die Tagesrenditen über zwei Zeiträume erfasst. Im Zeitraum 1 ergab sich ein Mittelwert von 6.4 % und eine Stichprobenvarianz von 17 $\%^2$. Im Zeitraum 2 ergab sich ein Mittelwert von 4.9 % und eine Stichprobenvarianz von 13 $\%^2$. In jedem Zeitraum wurden dabei 60 Beobachtungen erfasst.
Folgender Test ist durchzuführen in einer Zweistichprobenversion: ein

A47: (A) Gauß-Test. (B) Approx. Binomialtest. (C) t-Test. (D) Approx. Gauß-Test.

Der Betrag des Wertes der Teststatistik liegt im Intervall

A48: (A) $(1.90, 2.05]$. (B) $(2.05, 2.20]$. (C) $(2.20, 2.35]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der p-Wert zum Test liegt im Intervall

A49: (A) $(0.020, 0.025]$. (B) $(0.025, 0.030]$. (C) $(0.030, 0.035]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Zum Gewicht (in Gramm) von Äpfeln der Sorte Braeburn wurden Daten erhoben. Gehen Sie von normalverteilten Daten aus. Ein t-Test wurde mit Stata auf die Daten angewandt.

```
One-sample t test
------------------------------------------------------------------------------
Variable |     Obs        Mean    Std. Err.   Std. Dev.   [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       x |      70    181.7856    5.155931    43.13761      xxxxxx      xxxxxx
------------------------------------------------------------------------------
    mean = mean(x)                                                t =   2.2858
Ho: mean = 170                                   degrees of freedom =       69

    Ha: mean < 170               Ha: mean != 170                Ha: mean > 170
 Pr(T < t) = 0.9873         Pr(|T| > |t|) = 0.0253          Pr(T > t) = 0.0127
```

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen liegt in

A50: (A) $[183, 188]$. (B) $(188, 193]$. (C) $(193, 198]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für das im Mittel zu erwartende Gewicht μ der Äpfel liegt in

A51: (A) $[189.5, 190.5]$. (B) $(190.5, 191.5]$. (C) $(191.5, 192.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Teststatistik zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 175$ liegt in

A52: (A) $[1.25, 1.35]$. (B) $(1.35, 1.45]$. (C) $(1.45, 1.55]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für ein Unternehmen, das aus den Betrieben A und B besteht, soll die Vermutung geprüft werden, dass Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit unabhängig sind. Die Befragung von 200 zufällig ausgewählten Mitarbeitern ergab:

Betrieb	Zufriedene	nicht Zufriedene	Gesamt
A	70	30	100
B	50	50	100
Gesamt	120	80	200

Führen Sie einen geeigneten Signifikanztest zum Niveau $\alpha = 2.5\%$ durch.
Der Wert der Teststatistik des durchzuführenden Tests ist in

A53: (A) $[6.0, 7.5]$. (B) $(7.5, 9.0]$. (C) $(9.0, 10.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der kritische Wert des Tests liegt in

A54: (A) $[4.3, 4.5]$. (B) $(4.5, 4.7]$. (C) $(4.7, 4.9]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Vermutung, dass Unabhängigkeit zwischen der Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit besteht, ist durch den Test

A55: (A) widerlegt. (B) bestätigt.

Aufgabe
Basierend auf den beiden Beobachtungspaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) werde die KQ-Gerade $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$ ermittelt. Dabei gelte $x_1 < x_2$ und $y_1 > y_2$.
Dann ist

A56: (A) $\hat{\beta}_1 < 0$. (B) $\hat{\beta}_1 > 0$ (C) $\hat{\beta}_1 = 0$.

Aufgabe
Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Mitarbeiter (x_i) und den Ausgaben für Fortbildung (y_i [in Tausend Euro]) in Betrieben unterstellt man das Standardmodell der linearen Einfachregression $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Für $n = 25$ zufällig ausgewählte Betriebe erhält man: $\bar{x} = 170$, $\bar{y} = 200$,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 14\,500, \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 50\,000, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16\,250.$$

Die geschätzte Regressionsgerade sei $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.
$\hat{\beta}_1$ liegt in

A57: (A) $[0.84, 0.92]$. (B) $(0.92, 1.00]$. (C) $(1.00, 1.08]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Bei einer Firma von 110 Mitarbeitern liegt die Prognose für die zu erwartenden Fortbildungskosten (in Tausend Euro) in

A58: (A) $[125, 130]$. (B) $(130, 135]$. (C) $(135, 140]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Residualstreuung der Regression liegt in

A59: (A) $[29000, 31000]$. (B) $(31000, 33000]$. (C) $(33000, 35000]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für β_1 liegt in

A60: (A) $[1.70, 1.80]$. (B) $(1.80, 1.90]$. (C) $(1.90, 2.00]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

Klausur zur Veranstaltung
Grundlagen der Statistik

FSS 2018, 1. Termin, 15. Juni 2018
Version: C

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen

Aussage	A	B	C	D	
A1:	○	●	○	○	
A2:	○	○	●	⊗	
A3:	●	○	●	○	
A4:	○	⊗	○	⊗	D

Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 30 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe
Ein idealer Würfel wird 3 mal geworfen und die gewürfelten Augenzahlen werden notiert. Ereignis A tritt ein, wenn alle geworfenen Augenzahlen verschieden sind. Das Ereignis B tritt ein, wenn jeder folgende Wurf eine größere Augenzahl liefert als der jeweils vorherige Wurf.
Dann gilt:

A1: (A) $A = B$. (B) $A \subsetneq B$. (C) $B \subsetneq A$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, liegt im Intervall

A2: (A) $[0.08, 0.10]$. (B) $(0.10, 0.12]$. (C) $(0.12, 0.14]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In einer Stadt erscheinen zwei Zeitungen. Von den Haushalten der Stadt abonnieren 85% mindestens eine Zeitung. 65% der Haushalte abonnieren genau eine Zeitung.
Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt keine Zeitung abonniert hat, liegt in

A3: (A) $[0.13, 0.18]$. (B) $(0.18, 0.23]$. (C) $(0.23, 0.28]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt beide Zeitungen abonniert hat, liegt in

A4: (A) $[0.12, 0.17]$. (B) $(0.17, 0.22]$. (C) $(0.22, 0.27]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für drei Ereignisse A, B und C seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.35$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.2$ und $P(A \cap B \cap C) = 0.05$. Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B | B \cap C)$ liegt in

A5: (A) $[0.23, 0.28]$. (B) $(0.28, 0.33]$. (C) $(0.33, 0.38]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit $P((A \cup C) \cap B)$ liegt in

A6: (A) $(0.19, 0.24]$. (B) $(0.24, 0.29]$. (C) $(0.29, 0.34]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Aufgabe
A, B und C seien unabhängige Ereignisse.
Dann ist die Gleichung $P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

A7: (A) stets falsch. (B) weder stets richtig noch stets falsch. (C) stets richtig.

Aufgabe
Auf einer Party sind 40% der Gäste weiblich, die anderen männlich. 60% der Männer trinken Bier, aber nur 50% der Frauen.
Der Anteil der Biertrinker unter den Partygästen liegt in

A8: (A) $[0.49, 0.51]$. (B) $(0.51, 0.53]$. (C) $(0.53, 0.55]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

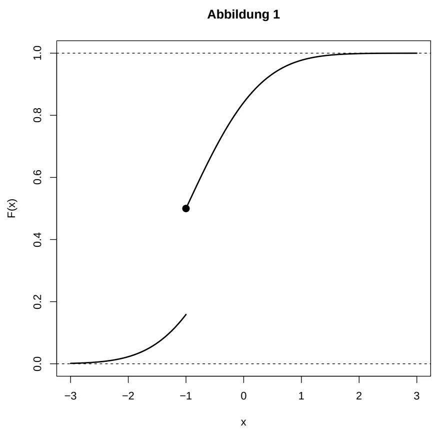
Der Anteil der Frauen unter den Biertrinkern der Partygäste liegt in

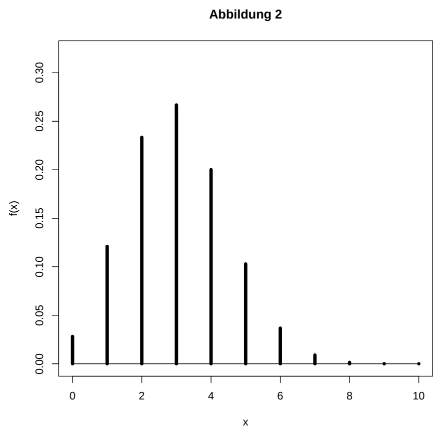
A9: (A) $[0.31, 0.34]$. (B) $(0.34, 0.37]$. (C) $(0.37, 0.40]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe

Ein gut gemischter Kartenstapel enthalte 16 Karten, davon seien 6 Herzkarten. Es werden nacheinander 3 Karten (ohne Zurücklegen) gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei 3 Herzkarten gezogen werden, liegt in

A10: (A) $[0.02, 0.03]$. (B) $(0.03, 0.04]$. (C) $(0.04, 0.05]$. (D) (A)–(C) sind falsch.





Aufgabe

In Abbildung 1 sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X dargestellt. Dann ist X

A11: (A) stetig. (B) weder stetig noch diskret. (C) diskret.

Die Zufallsvariable Y sei diskret verteilt mit Träger $\{0, 1, \ldots, 10\}$ und mit der in Abbildung 2 dargestellten Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Verteilung von Y ist dann

A12: (A) rechtsschief. (B) symmetrisch. (C) linksschief.

Aufgabe

Für die diskrete Zufallsvariable X gelte: $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.6$ und $P(X = 3) = 0.3$.
(a) Der Träger zu X ist

A13: (A) $\mathbb{R}$. (B) $\{0.2, 0.3, 0.5\}$. (C) $\{1, 2, 3\}$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(1 < X \leq 2)$ ist gleich

A14: (A) 0.1. (B) 0.3. (C) 0.6. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E((X - E(X))^3)$ liegt in

A15: (A) $[-0.06, -0.03)$. (B) $[-0.03, 0)$. (C) $[0, 0.03]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F(x) = 0.2 \cdot I_{[0,1)}(x) + 0.3 \cdot I_{[1,2)}(x) + 0.8 \cdot I_{[2,3)}(x) + I_{[3,\infty)}(x).$$

$E(X^2)$ liegt in

A16: (A) $(3.7, 4.0]$. (B) $(4.0, 4.3]$. (C) $(4.3, 4.6]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Träger $[2, 3]$.
Die Aussage $P(X \geq 2.8) = 0$ ist dann

A17: (A) stets falsch. (B) stets richtig. (C) weder stets richtig noch stets falsch.

Aufgabe
Der Quartalsumsatz einer Firma (in Millionen Euro) möge sich über eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichte beschreiben lassen:

$$f_X(x) = 0.1I_{[0,2]}(x) + 0.2I_{(2,4)}(x) + 0.2I_{[4,6]}(x).$$

Der im Mittel zu erwartende Quartalsumsatz liegt in

A18: (A) $(2.4, 2.7]$. (B) $(2.7, 3.0]$. (C) $(3.0, 3.3]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

x sei derjenige Wert, so dass der Quartalsumsatz mit Wahrscheinlichkeit 0.5 kleiner als x ist. x liegt dann im Intervall

A19: (A) $(3.0, 3.2]$. (B) $(3.2, 3.4]$. (C) $(3.4, 3.6]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim B(9, 0.3)$. $P(X = 1)$ liegt in

A20: (A) $[0, 0.15]$. (B) $(0.15, 0.17]$. (C) $(0.17, 0.19]$. (D) $(0.19, 1]$.

Aufgabe
Ein Aktienkurs steige mit Wahrscheinlichkeit 0.4 an einem Börsentag, er sinke mit Wahrscheinlichkeit 0.3 und bleibe mit Wahrscheinlichkeit 0.3 auf dem gleichen Niveau. Der Aktienverlauf sei für alle Börsentage unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an genau 4 von 9 Börsentagen steigt, liegt in

A21: (A) $[0.18, 0.20]$. (B) $(0.20, 0.22]$. (C) $(0.22, 0.24]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim Po(\lambda)$. Dabei sei bekannt, dass $P(X = 1) \approx 0.0553$ und $P(X = 2) \approx 0.1208$ gelten. Dann liegt λ in

A22: (A) $(3.10, 3.40]$. (B) $(3.40, 3.70]$. (C) $(3.70, 4.00]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-1.8)^2}{8}\Big).$$

Dann liegt die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 3)$ in

A23: (A) $[0.31, 0.34]$. (B) $(0.34, 0.37]$. (C) $(0.37, 0.40]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Das Gewicht von Eiern der Hühner einer bestimmten Rasse sei unabhängig voneinander normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 70\,\mathrm{g}$ und Standardabweichung $\sigma = 10\,\mathrm{g}$. S sei das Gesamtgewicht von 6 solchen Eiern (in g).
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei weniger als 63 g wiegt, ist in

A24: (A) $[0.19, 0.22]$. (B) $(0.22, 0.25]$. (C) $(0.25, 0.28]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(340 \leq S \leq 440)$ liegt in

A25: (A) $[0.78, 0.81]$. (B) $(0.81, 0.84]$. (C) $(0.84, 0.87]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei durch folgende Kontingenztabelle beschrieben:

X\Y	0	1
0	0.12	0.28
1	0.18	0.42

Dann sind X und Y

A26: (A) identisch verteilt. (B) unabhängig. (C) (A)–(B) sind falsch.

$P(X + Y = 1)$ liegt in

A27: (A) $(0.35, 0.38]$. (B) $(0.38, 0.41]$. (C) $(0.41, 0.44]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E(\frac{X}{1+Y})$ ist in

A28: (A) $(0.35, 0.38]$. (B) $(0.38, 0.41]$. (C) $(0.41, 0.44]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$Var(Y|X = 0)$ liegt in

A29: (A) $(0.18, 0.20]$. (B) $(0.20, 0.22]$. (C) $(0.22, 0.24]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $\mu = E(X_i)$ und $\sigma^2 = Var(X_i)$.
Die Kovarianz von $X_1 + \bar{X}_n$ und $X_2 + \bar{X}_n$ ist dann

A30: (A) σ^2/n. (B) $2\sigma^2/n$. (C) $3\sigma^2/n$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n \sim G(0, 2)$ seien u.i.v.
Der Grenzwert nach Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ ist

A31: (A) 2. (B) 4. (C) 8. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Kuhherde eines Milchbauern besteht aus 100 Milchkühen der gleichen Rasse. Die täglichen Milchmengen der einzelnen Kühe sind u.i.v. mit Erwartungswert 17 kg und Standardabweichung 3 kg. Die (approximative) Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Milchmenge der Herde den Wert 1715 kg übersteigt, liegt in

A32: (A) $(0.26, 0.29]$. (B) $(0.29, 0.32]$. (C) $(0.32, 0.35]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = 0$ und unbekannter Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$. $\bar{X}_3$ bezeichne das arithmetische Mittel aus X_1, X_2 und X_3. Gegeben seien die Schätzer

$$S_1 = \frac{1}{3}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X}_3)^2.$$

Von S_1 und S_2 sind erwartungstreu für σ^2:

A33: (A) Nur S_1. (B) S_1 und S_2. (C) Weder S_1 noch S_2. (D) Nur S_2.

Aufgabe
Der MSE-Wert eines Schätzer S zu einem Parameter θ berechnet sich als

$$MSE_\theta(S) = Var(S) + (Bias_\theta(S))^2.$$

X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = 3$.
Der MSE-Wert von $S_1 = 0.3X_1 + 0.7X_2$ zu μ liegt in

A34: (A) $(1.6, 1.9]$. (B) $(1.9, 2.2]$. (C) $(2.2, 2.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der MSE-Wert von $S_2 = 0.2X_1 + 0.6X_2 + 0.2X_3$ zu μ liegt in

A35: (A) $(1.2, 1.4]$. (B) $(1.4, 1.6]$. (C) $(1.6, 1.8]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Bei der Produktion von Festplatten für Computer entsteht mit Wahrscheinlichkeit θ eine fehlerhafte Festplatte. Die Festplatten werden unabhängig voneinander in Serien des Umfangs n produziert. Für eine Serie nehme die Zufallsvariable X_i, $i = 1, \ldots, n$, den Wert 1 an, falls die i-te produzierte Festplatte der Serie fehlerhaft ist, ansonsten den Wert 0. θ soll durch $\bar{X}_n$ geschätzt werden. Es werden folgende Aussagen formuliert:

(a) $Var(\bar{X}_n) = \theta(1 - \theta)$.

(b) $\bar{X}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für θ.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A36: (A) (a) und (b). (B) Weder (a) noch (b). (C) Nur (a). (D) Nur (b).

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. verteilt gemäß $P(X_i = 0) = 1 - \pi$, $P(X_i = 1) = 0.4\pi$, $P(X_i = 2) = 0.3\pi$ und $P(X_i = 3) = 0.3\pi$ für $\pi \in (0, 1)$.
Der Momentenschätzer für π werde mit $\hat{\Pi}_n$ bezeichnet. Er ist

A37: (A) $\bar{X}_n/1.5$. (B) $\bar{X}_n/1.7$. (C) $\bar{X}_n/1.9$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Es sei $S_n = \frac{1}{0.6 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} I_{[2,\infty)}(X_i)$. Konsistente Schätzer für π sind

A38: (A) $\hat{\Pi}_n$ und S_n. (B) $\hat{\Pi}_n$, nicht S_n. (C) S_n, nicht $\hat{\Pi}_n$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für den Anteil der Haushalte, die ein Fernsehgerät besitzen, ergab eine Stichprobe vom Umfang n zum Konfidenzniveau 0.9544 das Konfidenzintervall $[0.727, 0.833]$. n liegt in

A39: (A) $[200, 230]$. (B) $(230, 260]$. (C) $(260, 290]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Unter der *Quote* (englisch *Odds*) zu einer Wahrscheinlichkeit π versteht man die Zahl $\pi/(1-\pi)$. Die Quote zu 0.5 ist bspw. $0.5/(1 - 0.5) = 1 : 1 = 1$.
Ein Süßigkeitenhersteller interessiert sich für den Anteil π der Konsumenten, die den Geschmack eines neuen Snacks mögen. Im Rahmen einer repräsentativen Umfrage haben 15 von 70 Konsumenten gesagt, dass sie den Geschmack des neuen Snacks mögen.
Die untere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für π liegt in

A40: (A) $(0.05, 0.07]$. (B) $(0.07, 0.09]$. (C) $(0.09, 0.11]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für die Quote zu π liegt in

A41: (A) $(0.41, 0.44]$. (B) $(0.44, 0.47]$. (C) $(0.47, 0.50]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In der DIN-Mineralölnorm ist gefordert, dass die durchschnittliche Oktanzahl μ von Superbenzin mindestens 96 Oktan beträgt. Um einer Tankstellenkette eine Verletzung dieser Vorschrift nachzuweisen, führt eine Verbraucherorganisation an Hand von 100 zufällig und unabhängig voneinander entnommenen Superbenzinproben den Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 96$ zum Signifikanzniveau 0.05 durch.
Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 96.3 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A42: (A) eine korrekte Entscheidung. (B) ein Fehler 1. Art. (C) ein Fehler 2. Art.

Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 95.8 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A43: (A) ein Fehler 1. Art. (B) ein Fehler 2. Art. (C) eine korrekte Entscheidung.

Aufgabe
X sei normalverteilt mit Erwartungswert μ. Mit Hilfe einer Stichprobe aus der Verteilung von X soll zum Konfidenzniveau 0.95 ein Konfidenzintervall für μ berechnet werden. Die Stichprobe vom Umfang 4 ergab die Werte:

$$13,\ 29,\ 21,\ 33.$$

Die untere Grenze des Konfidenzintervalls liegt in

A44: (A) $(9.0, 11.0]$. (B) $(11.0, 13.0]$. (C) $(13.0, 15.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Paul hat normalverteilte Beobachtungen mit bekanntem σ^2 vorzuliegen. Zum Testproblem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ führt er keinen zweiseitigen Gauß-Test durch, sondern er führt die zwei zugehörigen einseitigen Gauß-Tests jeweils zum Niveau α durch und lehnt H_0 dann ab, wenn mindestens einer der beiden einseitigen Tests ablehnt. Der so durchgeführte Test hat das Signifikanzniveau

A45: (A) $\alpha/2$. (B) α. (C) 2α. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein Automobilhersteller bezieht von einem Zulieferer täglich eine Lieferung von 2.000 Batterien. θ bezeichne den Anteil fehlerhafter Batterien in einer Lieferung. Für jede Lieferung überprüft der Automobilhersteller mit Hilfe einer Stichprobe von Umfang 100 zum Signifikanzniveau 0.0082 die Nullhypothese $H_0 : \theta \leq 0.1$. Wenn H_0 abgelehnt wird, schickt der Automobilhersteller die Lieferung an den Zulieferer zurück. Für zwei Lieferungen ergab sich als Anzahl fehlerhafter Batterien in der Stichprobe (a) 22 und (b) 18.
Welche der Lieferungen werden an den Zulieferer zurückgeschickt?

A46: (A) Nur (a). (B) Nur (b). (C) Weder (a) noch (b). (D) (a) und (b).

Aufgabe
Um zu prüfen, ob sich die im Mittel zu erwartende Rendite einer Aktie verändert hat, wurden die Tagesrenditen über zwei Zeiträume erfasst. Im Zeitraum 1 ergab sich ein Mittelwert von 5.4 % und eine Stichprobenvarianz von 17 $\%^2$. Im Zeitraum 2 ergab sich ein Mittelwert von 4.5 % und eine Stichprobenvarianz von 15 $\%^2$. In jedem Zeitraum wurden dabei 50 Beobachtungen erfasst.
Folgender Test ist durchzuführen in einer Zweistichprobenversion: ein

A47: (A) Gauß-Test. (B) Approx. Binomialtest. (C) Approx. Gauß-Test. (D) t-Test.

Der Betrag des Wertes der Teststatistik liegt im Intervall

A48: (A) $(0.75, 0.85]$. (B) $(0.85, 0.95]$. (C) $(0.95, 1.05]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der p-Wert zum Test liegt im Intervall

A49: (A) $(0.17, 0.22]$. (B) $(0.22, 0.27]$. (C) $(0.27, 0.32]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Zum Gewicht (in Gramm) von Äpfeln der Sorte Braeburn wurden Daten erhoben. Gehen Sie von normalverteilten Daten aus. Ein t-Test wurde mit Stata auf die Daten angewandt.

```
One-sample t test
------------------------------------------------------------------------------
Variable |     Obs        Mean    Std. Err.   Std. Dev.   [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       x |      50    193.4894     4.55714    32.22384      xxxxxx      xxxxxx
------------------------------------------------------------------------------
    mean = mean(x)                                                t =   2.9601
Ho: mean = 180                                   degrees of freedom =       49

    Ha: mean < 180              Ha: mean != 180               Ha: mean > 180
 Pr(T < t) = 0.9976         Pr(|T| > |t|) = 0.0047          Pr(T > t) = 0.0024
```

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen liegt in

A50: (A) $[180, 185]$. (B) $(185, 190]$. (C) $(190, 195]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für das im Mittel zu erwartende Gewicht μ der Äpfel liegt in

A51: (A) $[202.0, 203.0]$. (B) $(203.0, 204.0]$. (C) $(204.0, 205.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Teststatistik zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 175$ liegt in

A52: (A) $[3.80, 4.00]$. (B) $(4.00, 4.20]$. (C) $(4.20, 4.40]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für ein Unternehmen, das aus den Betrieben A und B besteht, soll die Vermutung geprüft werden, dass Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit unabhängig sind. Die Befragung von 200 zufällig ausgewählten Mitarbeitern ergab:

Betrieb	Zufriedene	nicht Zufriedene	Gesamt
A	50	50	100
B	60	40	100
Gesamt	110	90	200

Führen Sie einen geeigneten Signifikanztest zum Niveau $\alpha = 2.5\%$ durch.
Der Wert der Teststatistik des durchzuführenden Tests ist in

A53: (A) $[1.3, 1.6]$. (B) $(1.6, 1.9]$. (C) $(1.9, 2.2]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der kritische Wert des Tests liegt in

A54: (A) $[4.7, 4.9]$. (B) $(4.9, 5.1]$. (C) $(5.1, 5.3]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Vermutung, dass Unabhängigkeit zwischen der Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit besteht, ist durch den Test

A55: (A) bestätigt. (B) widerlegt.

Aufgabe
Basierend auf den beiden Beobachtungspaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) werde die KQ-Gerade $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$ ermittelt. Dabei gelte $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$.
Dann ist

A56: (A) $\hat{\beta}_1 = 0$. (B) $\hat{\beta}_1 > 0$ (C) $\hat{\beta}_1 < 0$.

Aufgabe
Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Mitarbeiter (x_i) und den Ausgaben für Fortbildung (y_i [in Tausend Euro]) in Betrieben unterstellt man das Standardmodell der linearen Einfachregression $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Für $n = 15$ zufällig ausgewählte Betriebe erhält man: $\bar{x} = 150$, $\bar{y} = 230$,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 10\,600, \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 50\,000, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16\,250.$$

Die geschätzte Regressionsgerade sei $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.
$\hat{\beta}_1$ liegt in

A57: (A) $[1.40, 1.60]$. (B) $(1.60, 1.80]$. (C) $(1.80, 2.00]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Bei einer Firma von 80 Mitarbeitern liegt die Prognose für die zu erwartenden Fortbildungskosten (in Tausend Euro) in

A58: (A) $[100, 105]$. (B) $(105, 110]$. (C) $(110, 115]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Residualstreuung der Regression liegt in

A59: (A) $[24000, 26000]$. (B) $(26000, 28000]$. (C) $(28000, 30000]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für β_1 liegt in

A60: (A) $[2.20, 2.30]$. (B) $(2.30, 2.40]$. (C) $(2.40, 2.50]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

FSS 2018, 1. Termin, 15. Juni 2018
Version: D

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen

Aussage	A	B	C	D	
A1:	○	●	○	○	
A2:	○	○	●	~~●~~	
A3:	●	○	●	○	
A4:	○	~~●~~	○	~~●~~	D

Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 30 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe
Ein idealer Würfel wird 3 mal geworfen und die gewürfelten Augenzahlen werden notiert. Ereignis A tritt ein, wenn alle geworfenen Augenzahlen verschieden sind. Das Ereignis B tritt ein, wenn jeder folgende Wurf eine größere Augenzahl liefert als der jeweils vorherige Wurf.
Dann gilt:

A1: (A) $A \subsetneq B$. (B) $B \subsetneq A$. (C) $A = B$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, liegt im Intervall

A2: (A) $[0.06, 0.08]$. (B) $(0.08, 0.10]$. (C) $(0.10, 0.12]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In einer Stadt erscheinen zwei Zeitungen. Von den Haushalten der Stadt abonnieren 95% mindestens eine Zeitung. 50% der Haushalte abonnieren genau eine Zeitung.
Ein Haushalt wird zufällig ausgewählt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt keine Zeitung abonniert hat, liegt in

A3: (A) $[0.08, 0.14]$. (B) $(0.14, 0.20]$. (C) $(0.20, 0.26]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Haushalt beide Zeitungen abonniert hat, liegt in

A4: (A) $[0.32, 0.37]$. (B) $(0.37, 0.42]$. (C) $(0.42, 0.47]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für drei Ereignisse A, B und C seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.35$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.15$ und $P(A \cap B \cap C) = 0.1$. Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B | B \cap C)$ liegt in

A5: (A) $[0.50, 0.60]$. (B) $(0.60, 0.70]$. (C) $(0.70, 0.80]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Die Wahrscheinlichkeit $P((A \cup C) \cap B)$ liegt in

A6: (A) $(0.12, 0.17]$. (B) $(0.17, 0.23]$. (C) $(0.23, 0.28]$. (D) (A)-(C) sind falsch.

Aufgabe
A, B und C seien unabhängige Ereignisse.
Dann ist die Gleichung $P((A \cup B) \cap C) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

A7: (A) stets richtig. (B) weder stets richtig noch stets falsch. (C) stets falsch.

Aufgabe
Auf einer Party sind 30% der Gäste weiblich, die anderen männlich. 60% der Männer trinken Bier, aber nur 30% der Frauen.
Der Anteil der Biertrinker unter den Partygästen liegt in

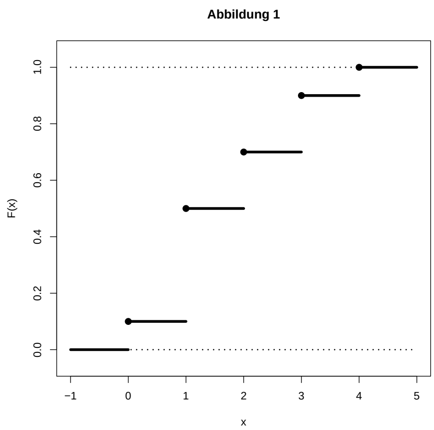
A8: (A) $[0.50, 0.52]$. (B) $(0.52, 0.54]$. (C) $(0.54, 0.56]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

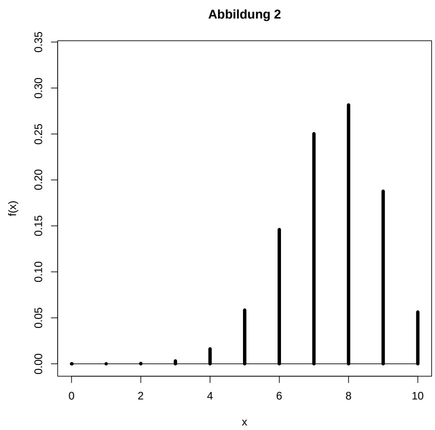
Der Anteil der Männer unter den Biertrinkern der Partygäste liegt in

A9: (A) $[0.65, 0.70]$. (B) $(0.70, 0.75]$. (C) $(0.75, 0.80]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein gut gemischter Kartenstapel enthalte 20 Karten, davon seien 8 Herzkarten. Es werden nacheinander 3 Karten (ohne Zurücklegen) gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei 3 Herzkarten gezogen werden, liegt in

A10: (A) $[0.03, 0.045]$. (B) $(0.045, 0.06]$. (C) $(0.06, 0.075]$. (D) (A)–(C) sind falsch.





Aufgabe
In Abbildung 1 sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X dargestellt. Dann ist X

A11: (A) stetig. (B) diskret. (C) weder stetig noch diskret.

Die Zufallsvariable Y sei diskret verteilt mit Träger $\{0, 1, \dots, 10\}$ und mit der in Abbildung 2 dargestellten Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Verteilung von Y ist dann

A12: (A) linksschief. (B) rechtsschief. (C) symmetrisch.

Aufgabe
Für die diskrete Zufallsvariable X gelte: $P(X = 1) = 0.6$, $P(X = 2) = 0.2$ und $P(X = 3) = 0.2$.
(a) Der Träger zu X ist

A13: (A) $\mathbb{R}$. (B) $\{1, 2, 3\}$. (C) $\{0.2, 0.3, 0.5\}$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(1 < X \leq 2)$ ist gleich

A14: (A) 0.5. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E((X - E(X))^3)$ liegt in

A15: (A) $[0.30, 0.35]$. (B) $(0.35, 0.40]$. (C) $(0.40, 0.45]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$F(x) = 0.1 \cdot I_{[0,1)}(x) + 0.3 \cdot I_{[1,2)}(x) + 0.6 \cdot I_{[2,3)}(x) + I_{[3,\infty)}(x).$$

$E(X^2)$ liegt in

A16: (A) $(4.9, 5.2]$. (B) $(5.2, 5.5]$. (C) $(5.5, 5.8]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Träger $[2,3]$.
Die Aussage $P(X \leq 2.2) = 0$ ist dann

A17: (A) stets richtig. (B) weder stets richtig noch stets falsch. (C) stets falsch.

Aufgabe
Der Quartalsumsatz einer Firma (in Millionen Euro) möge sich über eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichte beschreiben lassen:

$$f_X(x) = 0.1 I_{[0,2]}(x) + 0.1 I_{(2,4)}(x) + 0.3 I_{[4,6]}(x).$$

Der im Mittel zu erwartende Quartalsumsatz liegt in

A18: (A) $(3.0, 3.3]$. (B) $(3.3, 3.6]$. (C) $(3.6, 3.9]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

x sei derjenige Wert, so dass der Quartalsumsatz mit Wahrscheinlichkeit 0.35 kleiner als x ist. x liegt dann im Intervall

A19: (A) $(3.6, 3.9]$. (B) $(3.9, 4.2]$. (C) $(4.2, 4.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim B(12, 0.3)$. $P(X = 1)$ liegt in

A20: (A) $[0, 0.09]$. (B) $(0.09, 0.12]$. (C) $(0.12, 0.15]$. (D) $(0.15, 1]$.

Aufgabe
Ein Aktienkurs steige mit Wahrscheinlichkeit 0.4 an einem Börsentag, er sinke mit Wahrscheinlichkeit 0.3 und bleibe mit Wahrscheinlichkeit 0.3 auf dem gleichen Niveau. Der Aktienverlauf sei für alle Börsentage unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an genau 3 von 12 Börsentagen steigt, liegt in

A21: (A) $[0.07, 0.10]$. (B) $(0.10, 0.13]$. (C) $(0.13, 0.16]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Es sei $X \sim Po(\lambda)$. Dabei sei bekannt, dass $P(X = 1) \approx 0.3595$ und $P(X = 2) \approx 0.2211$ gelten. Dann liegt λ in

A22: (A) $(0.90, 1.10]$. (B) $(1.10, 1.30]$. (C) $(1.30, 1.50]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-2.1)^2}{18}\Big).$$

Dann liegt die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 4)$ in

A23: (A) $[0.27, 0.30]$. (B) $(0.30, 0.33]$. (C) $(0.33, 0.36]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Das Gewicht von Eiern der Hühner einer bestimmten Rasse sei unabhängig voneinander normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 55\,\text{g}$ und Standardabweichung $\sigma = 10\,\text{g}$. S sei das Gesamtgewicht von 6 solchen Eiern (in g).
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei weniger als 51 g wiegt, ist in

A24: (A) $[0.33, 0.36]$. (B) $(0.36, 0.39]$. (C) $(0.39, 0.42]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$P(340 \leq S \leq 430)$ liegt in

A25: (A) $[0.33, 0.36]$. (B) $(0.36, 0.39]$. (C) $(0.39, 0.42]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei durch folgende Kontingenztabelle beschrieben:

X\Y	0	1
0	0.15	0.35
1	0.15	0.35

Dann sind X und Y

A26: (A) identisch verteilt. (B) unabhängig. (C) (A)–(B) sind falsch.

$P(X + Y = 1)$ liegt in

A27: (A) $(0.47, 0.52]$. (B) $(0.52, 0.57]$. (C) $(0.57, 0.62]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$E(\frac{X}{1+Y})$ ist in

A28: (A) $(0.28, 0.31]$. (B) $(0.31, 0.34]$. (C) $(0.34, 0.37]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

$Var(Y|X = 0)$ liegt in

A29: (A) $(0.20, 0.22]$. (B) $(0.22, 0.24]$. (C) $(0.24, 0.26]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $\mu = E(X_i)$ und $\sigma^2 = Var(X_i)$.
Die Kovarianz von $X_1 - \bar{X}_n$ und $X_2 - 3\bar{X}_n$ ist dann

A30: (A) $-2\sigma^2/n$. (B) $-3\sigma^2/n$. (C) $-\sigma^2/n$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n \sim G(0, 5)$ seien u.i.v.
Der Grenzwert nach Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ ist

A31: (A) 24.75. (B) 28.25. (C) 31.25. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Die Kuhherde eines Milchbauern besteht aus 100 Milchkühen der gleichen Rasse. Die täglichen Milchmengen der einzelnen Kühe sind u.i.v. mit Erwartungswert 18 kg und Standardabweichung 4 kg. Die (approximative) Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Milchmenge der Herde den Wert 1815 kg übersteigt, liegt in

A32: (A) $(0.31, 0.34]$. (B) $(0.34, 0.37]$. (C) $(0.37, 0.40]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = 0$ und unbekannter Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$. $\bar{X}_3$ bezeichne das arithmetische Mittel aus X_1, X_2 und X_3. Gegeben seien die Schätzer

$$S_1 = \frac{1}{3}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X}_3)^2.$$

Von S_1 und S_2 sind erwartungstreu für σ^2:

A33: (A) Weder S_1 noch S_2. (B) S_1 und S_2. (C) Nur S_2. (D) Nur S_1.

Aufgabe
Der MSE-Wert eines Schätzer S zu einem Parameter θ berechnet sich als

$$MSE_\theta(S) = Var(S) + (Bias_\theta(S))^2.$$

X_1, X_2, X_3 seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = 5$.
Der MSE-Wert von $S_1 = 0.3X_1 + 0.7X_2$ zu μ liegt in

A34: (A) $(2.4, 2.6]$. (B) $(2.6, 2.8]$. (C) $(2.8, 3.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der MSE-Wert von $S_2 = 0.2X_1 + 0.6X_2 + 0.2X_3$ zu μ liegt in

A35: (A) $(2.1, 2.3]$. (B) $(2.3, 2.5]$. (C) $(2.5, 2.7]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Bei der Produktion von Festplatten für Computer entsteht mit Wahrscheinlichkeit θ eine fehlerhafte Festplatte. Die Festplatten werden unabhängig voneinander in Serien des Umfangs n produziert. Für eine Serie nehme die Zufallsvariable X_i, $i = 1, \ldots, n$, den Wert 1 an, falls die i-te produzierte Festplatte der Serie fehlerhaft ist, ansonsten den Wert 0. θ soll durch $\bar{X}_n$ geschätzt werden. Es werden folgende Aussagen formuliert:

(a) $\bar{X}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für θ.

(b) $Var(\bar{X}_n) = \theta(1 - \theta)/n$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A36: (A) Nur (b). (B) Nur (a). (C) Weder (a) noch (b). (D) (a) und (b).

Aufgabe
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. verteilt gemäß $P(X_i = 0) = 1 - \pi$, $P(X_i = 1) = 0.2\pi$, $P(X_i = 2) = 0.6\pi$ und $P(X_i = 3) = 0.2\pi$ für $\pi \in (0, 1)$.
Der Momentenschätzer für π werde mit $\hat{\Pi}_n$ bezeichnet. Er ist

A37: (A) $\bar{X}_n/1.7$. (B) $\bar{X}_n/1.5$. (C) $\bar{X}_n/2$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Es sei $S_n = \frac{1}{0.8 \cdot n} \sum_{i=1}^{n} I_{[2,\infty)}(X_i)$. Konsistente Schätzer für π sind

A38: (A) $\hat{\Pi}_n$, nicht S_n. (B) S_n, nicht $\hat{\Pi}_n$. (C) $\hat{\Pi}_n$ und S_n. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für den Anteil der Haushalte, die ein Fernsehgerät besitzen, ergab eine Stichprobe vom Umfang n zum Konfidenzniveau 0.9544 das Konfidenzintervall $[0.778, 0.882]$. n liegt in

A39: (A) $[160, 180]$. (B) $(180, 200]$. (C) $(200, 220]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Unter der *Quote* (englisch *Odds*) zu einer Wahrscheinlichkeit π versteht man die Zahl $\pi/(1-\pi)$. Die Quote zu 0.5 ist bspw. $0.5/(1-0.5) = 1 : 1 = 1$.
Ein Süßigkeitenhersteller interessiert sich für den Anteil π der Konsumenten, die den Geschmack eines neuen Snacks mögen. Im Rahmen einer repräsentativen Umfrage haben 15 von 60 Konsumenten gesagt, dass sie den Geschmack des neuen Snacks mögen.
Die untere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für π liegt in

A40: (A) $(0.10, 0.12]$. (B) $(0.12, 0.14]$. (C) $(0.14, 0.16]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des approximativen Konfidenzintervalls zum Niveau 0.98 für die Quote zu π liegt in

A41: (A) $(0.29, 0.32]$. (B) $(0.32, 0.35]$. (C) $(0.35, 0.38]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
In der DIN-Mineralölnorm ist gefordert, dass die durchschnittliche Oktanzahl μ von Superbenzin mindestens 96 Oktan beträgt. Um einer Tankstellenkette eine Verletzung dieser Vorschrift nachzuweisen, führt eine Verbraucherorganisation an Hand von 100 zufällig und unabhängig voneinander entnommenen Superbenzinproben den Parametertest der Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 96$ zum Signifikanzniveau 0.05 durch.
Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 96.3 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A42: (A) eine korrekte Entscheidung. (B) ein Fehler 2. Art. (C) ein Fehler 1. Art.

Angenommen, das Superbenzin der Tankstellenkette hat im Durchschnitt 95.8 Oktan und der Test führt zur Entscheidung: „H_0 wird nicht abgelehnt“. Dann ist das

A43: (A) eine korrekte Entscheidung. (B) ein Fehler 1. Art. (C) ein Fehler 2. Art.

Aufgabe
X sei normalverteilt mit Erwartungswert μ. Mit Hilfe einer Stichprobe aus der Verteilung von X soll zum Konfidenzniveau 0.95 ein Konfidenzintervall für μ berechnet werden. Die Stichprobe vom Umfang 4 ergab die Werte:

$$21, 25, 21, 33.$$

Die obere Grenze des Konfidenzintervalls liegt in

A44: (A) $(29.0, 31.0]$. (B) $(31.0, 33.0]$. (C) $(33.0, 35.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Paul hat normalverteilte Beobachtungen mit bekanntem σ^2 vorzuliegen. Zum Testproblem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ führt er keinen zweiseitigen Gauß-Test durch, sondern er führt die zwei zugehörigen einseitigen Gauß-Tests jeweils zum Niveau α durch und lehnt H_0 dann ab, wenn mindestens einer der beiden einseitigen Tests ablehnt. Der so durchgeführte Test hat das Signifikanzniveau

A45: (A) $\alpha/2$. (B) 2α. (C) α. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Ein Automobilhersteller bezieht von einem Zulieferer täglich eine Lieferung von 2.000 Batterien. θ bezeichne den Anteil fehlerhafter Batterien in einer Lieferung. Für jede Lieferung überprüft der Automobilhersteller mit Hilfe einer Stichprobe von Umfang 200 zum Signifikanzniveau 0.0139 die Nullhypothese $H_0 : \theta \leq 0.08$. Wenn H_0 abgelehnt wird, schickt der Automobilhersteller die Lieferung an den Zulieferer zurück. Für zwei Lieferungen ergab sich als Anzahl fehlerhafter Batterien in der Stichprobe (a) 22 und (b) 18.
Welche der Lieferungen werden an den Zulieferer zurückgeschickt?

A46: (A) (a) und (b). (B) Weder (a) noch (b). (C) Nur (a). (D) Nur (b).

Aufgabe
Um zu prüfen, ob sich die im Mittel zu erwartende Rendite einer Aktie verändert hat, wurden die Tagesrenditen über zwei Zeiträume erfasst. Im Zeitraum 1 ergab sich ein Mittelwert von 6.4 % und eine Stichprobenvarianz von 17 $\%^2$. Im Zeitraum 2 ergab sich ein Mittelwert von 5.2 % und eine Stichprobenvarianz von 13 $\%^2$. In jedem Zeitraum wurden dabei 60 Beobachtungen erfasst.
Folgender Test ist durchzuführen in einer Zweistichprobenversion: ein

A47: (A) Approx. Gauß-Test. (B) Gauß-Test. (C) Approx. Binomialtest. (D) t-Test.

Der Betrag des Wertes der Teststatistik liegt im Intervall

A48: (A) $(1.50, 1.65]$. (B) $(1.65, 1.80]$. (C) $(1.80, 1.95]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der p-Wert zum Test liegt im Intervall

A49: (A) $(0.06, 0.07]$. (B) $(0.07, 0.08]$. (C) $(0.08, 0.09]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Zum Gewicht (in Gramm) von Äpfeln der Sorte Braeburn wurden Daten erhoben. Gehen Sie von normalverteilten Daten aus. Ein t-Test wurde mit Stata auf die Daten angewandt.

```
One-sample t test
------------------------------------------------------------------------------
Variable |     Obs        Mean    Std. Err.   Std. Dev.   [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       x |      60    182.6105    4.259197     32.9916      xxxxxx      xxxxxx
------------------------------------------------------------------------------
    mean = mean(x)                                                t =   2.9608
Ho: mean = 170                                   degrees of freedom =       59

   Ha: mean < 170             Ha: mean != 170               Ha: mean > 170
 Pr(T < t) = 0.9978       Pr(|T| > |t|) = 0.0044          Pr(T > t) = 0.0022
```

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen liegt in

A50: (A) $[184, 188]$. (B) $(188, 192]$. (C) $(192, 196]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für das im Mittel zu erwartende Gewicht μ der Äpfel liegt in

A51: (A) $[189.5, 190.5]$. (B) $(190.5, 191.5]$. (C) $(191.5, 192.5]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Teststatistik zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 175$ liegt in

A52: (A) $[1.55, 1.65]$. (B) $(1.65, 1.75]$. (C) $(1.75, 1.85]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Aufgabe
Für ein Unternehmen, das aus den Betrieben A und B besteht, soll die Vermutung geprüft werden, dass Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit unabhängig sind. Die Befragung von 200 zufällig ausgewählten Mitarbeitern ergab:

Betrieb	Zufriedene	nicht Zufriedene	Gesamt
A	50	50	100
B	80	20	100
Gesamt	130	70	200

Führen Sie einen geeigneten Signifikanztest zum Niveau $\alpha = 2.5\%$ durch.
Der Wert der Teststatistik des durchzuführenden Tests ist in

A53: (A) $[19.0, 21.0]$. (B) $(21.0, 23.0]$. (C) $(23.0, 25.0]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Der kritische Wert des Tests liegt in

A54: (A) $[4.0, 4.3]$. (B) $(4.3, 4.6]$. (C) $(4.6, 4.9]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Vermutung, dass Unabhängigkeit zwischen der Betriebszugehörigkeit und Arbeitsplatzzufriedenheit besteht, ist durch den Test

A55: (A) widerlegt. (B) bestätigt.

Aufgabe

Basierend auf den beiden Beobachtungspaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) werde die KQ-Gerade $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$ ermittelt. Dabei gelte $x_1 < x_2$ und $y_1 > y_2$.
Dann ist

A56: (A) $\hat{\beta}_1 > 0$ (B) $\hat{\beta}_1 = 0$. (C) $\hat{\beta}_1 < 0$.

Aufgabe

Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der Mitarbeiter (x_i) und den Ausgaben für Fortbildung (y_i [in Tausend Euro]) in Betrieben unterstellt man das Standardmodell der linearen Einfachregression $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Für $n = 23$ zufällig ausgewählte Betriebe erhält man: $\bar{x} = 170$, $\bar{y} = 230$,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 14\,500, \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 40\,000, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16\,250.$$

Die geschätzte Regressionsgerade sei $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.
$\hat{\beta}_1$ liegt in

A57: (A) $[0.75, 0.85]$. (B) $(0.85, 0.95]$. (C) $(0.95, 1.05]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Bei einer Firma von 110 Mitarbeitern liegt die Prognose für die zu erwartenden Fortbildungskosten (in Tausend Euro) in

A58: (A) $[125, 135]$. (B) $(135, 145]$. (C) $(145, 155]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die Residualstreuung der Regression liegt in

A59: (A) $[17000, 19000]$. (B) $(19000, 21000]$. (C) $(21000, 23000]$. (D) (A)–(C) sind falsch.

Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für β_1 liegt in

A60: (A) $[1.60, 1.70]$. (B) $(1.70, 1.80]$. (C) $(1.80, 1.90]$. (D) (A)–(C) sind falsch.